

**V 演習 4.12** (教科書 100 ページ)  $\vec{a} = {}^t(1\ 1\ 0)$ ,  $\vec{b} = {}^t(0\ 1\ -1)$ ,  $\vec{c} = {}^t(1\ 2\ 3)$  に対して, 以下を求めましょう.

- (1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  が張る平行四辺形の面積.    (2)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  に直交する単位ベクトル.  
 (3)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  が張る平行六面体の体積.

解答 (1)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の張る平行四辺形の面積  $S$  は

$$S = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{3}$$

(2)  $\vec{a} \times \vec{b}$  が  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  に垂直ですから, 大きさを 1 にした

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める単位ベクトルです.

(3) 求める体積を  $V$  にすると

$$V = \text{abs} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

となります. 他方

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

から  $V = 4$  であることが分かります.