Lagrange の未定乗数法

戸瀬信之

November 29, 2017

U を $\mathbf{R}^2$ の開集合とする．2 関数

$$f, g : U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき

問題

$g(x, y) = 0$ の下で $z = f(x, y)$ を極大化（極小化）する

例 1

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{の下で} \quad z = f(x,y) = 2x + y$$

例 2 $I, p, q > 0$ とする．予算制約

$$g(x,y) = I - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x,y) = \sqrt{xy}$$

を最大化する．この問題は第 1 財，第 2 財の価格が p, q のときに，予算 I をすべて支出して第 1 財を x，第 2 財を y 購入して効用を最大化するという問題である．

定理

$$g(a, b) = 0, \quad g_y(a, b) \neq 0$$

ならば，(a, b) の近くで $\{(x, y) \in U;\ g(x, y) = 0\}$ は

$$y = \varphi(x)$$

と表すことができる.

単位円

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

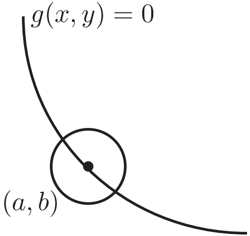
上の点 (a, b) において考える.

<u>$b > 0$ のとき</u>

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

<u>$b < 0$ のとき</u>

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$



$$g(a,b)=0, \quad g_y(a,b)\neq 0$$

を仮定して，陰関数定理を適用する．(a,b) の近くで

$$y=\varphi(x)$$

と曲線 $g(x,y)=0$ を表す．

(a,b) で極大（極小）ならば

$$F(t)=f(t,\varphi(t))$$

とすると $F'(a)=0$ が従う．

解法 (2)

Chain Rule を使うと

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

から

$$0 = F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b) \cdot \varphi'(a)$$

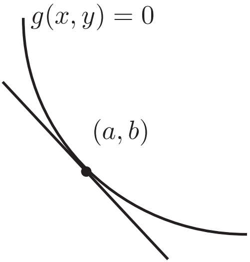
が分かります．さらに $g(t, \varphi(t)) \equiv 0$ の両辺を t で微分して

$$g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

から

$$g_x(a, b) + g_y(a, b) \cdot \varphi'(a) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

が分かります．



接線の傾きを考えると

(a, b) における曲線 $g(x, y) = 0$ の接線は

$$g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) = 0$$

であるが，$g_y(a, b) \neq 0$ から

$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x - a) + b$$

となる．

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

解法 (3)

$f_x(a,b) + f_y(a,b)\cdot\varphi'(a) = 0$ に $\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$ を代入して

$$f_x(a,b) - \frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\cdot f_y(a,b) = 0$$

を得ます．ここで Lagrange の未定乗数

$$\lambda = -\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$$

を定めると

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} f_x(a,b) & + & \lambda g_x(a,b) & = & 0 \\ f_y(a,b) & + & \lambda g_y(a,b) & = & 0 \\ & & g(a,b) & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{(L)}$$

が導けます．

定理

$g(a,b)=0,\ g_y(a,b)\neq 0$ を満たす $(a,b)\in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします．このとき (L) を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．

例

問題 $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の下で $z=f(x,y)=2x+y$

(x,y) で極大（極小）とすると

$$\begin{cases} 2 & + & \lambda\cdot 2x & = & 0 & (i) \\ 1 & + & \lambda\cdot 2y & = & 0 & (ii) \\ & & x^2+y^2-1 & = & 0 & (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda\in\mathbf{R}$ が存在します．$\lambda=0$ とすると (i) が $2=0$ となりますから，$\lambda\neq 0$ です．(i),(ii) から

$$x=-\frac{1}{\lambda},\quad y=-\frac{1}{2\lambda} \tag{iv}$$

となりますが，これを (iii) に代入すると

例

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \quad \text{から} \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

となります．(iv) に代入して

$$x = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{（複号同順）}$$