

Lagrange の未定乗数法

戸瀬信之

V01 Nov 29, 2017

V03 Nov. 18, 2020 for CalcNT

制約条件付き極値問題

U を \mathbf{R}^2 の開集合とする. 2 関数

$$f, g: U \rightarrow \mathbf{R}$$

が与えられているとき

問題

$g(x, y) = 0$ の下で $z = f(x, y)$ を極大化 (極小化) する

制約条件付き極値問題—例

例 1

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{の下で} \quad z = f(x, y) = 2x + y$$

例 2 $l, p, q > 0$ とする. 予算制約

$$g(x, y) = l - px - qy = 0 \quad (x, y > 0)$$

の下で効用関数

$$u(x, y) = \sqrt{xy}$$

を最大化する. この問題は第 1 財, 第 2 財の価格が p, q のときに, 予算 l をすべて支出して第 1 財を x , 第 2 財を y 購入して効用を最大化するという問題である.

定理

$$g(a, b) = 0, \quad g_y(a, b) \neq 0$$

ならば, (a, b) の近くで $\{(x, y) \in U; g(x, y) = 0\}$ は

$$y = \varphi(x)$$

と表すことができる.

陰関数定理—例

単位円

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

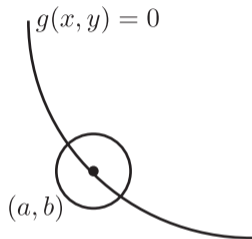
上の点 (a, b) において考える.

$b > 0$ のとき

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$b < 0$ のとき

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$



$$g(a, b) = 0, \quad g_y(a, b) \neq 0$$

を仮定して、陰関数定理を適用する. (a, b) の近くで

$$y = \varphi(x)$$

と曲線 $g(x, y) = 0$ を表す.

(a, b) で極大 (極小) ならば

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

とすると $F'(a) = 0$ が従う.

解法 (2)

Chain Rule を使うと

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

から

$$0 = F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b) \cdot \varphi'(a)$$

が分かります。さらに $g(t, \varphi(t)) \equiv 0$ の両辺を t で微分して

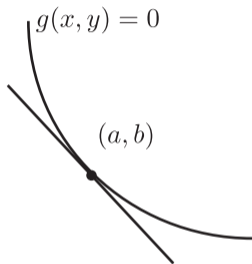
$$g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

から

$$g_x(a, b) + g_y(a, b) \cdot \varphi'(a) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

が分かります。

$\varphi'(a)$ の別の求め方



線の傾きを考えると

(a, b) における曲線 $g(x, y) = 0$ の接線は

$$g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) = 0$$

であるが、 $g_y(a, b) \neq 0$ から

$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x - a) + b$$

となる。

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

接

解法 (3)

$f_x(a, b) + f_y(a, b) \cdot \varphi'(a) = 0$ に $\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$ を代入して

$$f_x(a, b) - \frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)} \cdot f_y(a, b) = 0$$

を得ます。ここで Lagrange の未定乗数

$$\lambda = -\frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)}$$

を定めると

$$\begin{cases} f_x(a, b) + \lambda g_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) + \lambda g_y(a, b) = 0 \\ g(a, b) = 0 \end{cases} \quad (\text{L})$$

が導けます。

定理

$g(a, b) = 0$, $g_y(a, b) \neq 0$ を満たす $(a, b) \in U$ において制約条件付き極値問題が極大値（極小値）をとるとします. このとき (L) を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します.

例

問題 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で $z = f(x, y) = 2x + y$

(x, y) で極大 (極小) とすると

$$\begin{cases} 2 + \lambda \cdot 2x = 0 & (i) \\ 1 + \lambda \cdot 2y = 0 & (ii) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (iii) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在します. $\lambda = 0$ とすると (i) が $2 = 0$ となりますから, $\lambda \neq 0$ です. (i), (ii) から

$$x = -\frac{1}{\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda} \tag{iv}$$

となりますが, これを (iii) に代入すると

例

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \quad \text{から} \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となります. (iv) に代入して

$$x = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y = \mp \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\text{複号同順})$$