

# 消費者理論（2財の場合）

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

V003 2021年10月 (intro)

# はじめに

- 2財の消費者理論を数学的に解説します。
- $x_1$  と  $x_2$  : 第1財と第2財の購入量
- $p_1 > 0$  と  $p_2 > 0$  : 第1財と第2財の価格,  $I > 0$  : 所得
- (予算制約)  $p_1x_1 + p_2x_2 = I$  の下で効用関数

$$u(x_1, x_2)$$

を最大化 (極大化) します。

- (前提)  $u: \{(x_1, x_2); x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$  で  $C^2$  級

# Lagrange の未定乗数法

- 制約条件  $g(x_1, x_2) = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$  の下で
- $y = u(x_1, x_2)$  を極大化する。
- $(a_1, a_2)$  で極大値をとるとする。
- ある  $\lambda$  が存在して

$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = 0 \\ I - p_1x_1 - p_2x_2 & = 0 \end{cases}$$

が  $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$  において成立する。

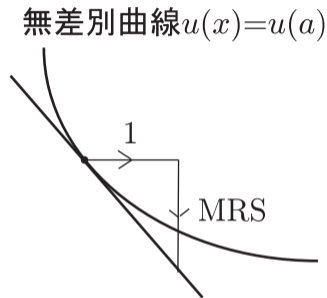
- 貨幣 1 単位あたりの限界効用の均等

$$\frac{u_{x_1}(a)}{p_1} = \frac{u_{x_2}(a)}{p_2} = \lambda$$

# 限界代替率

- 無差別曲線  $u(x) = u(a)$  の接線の傾き  
$$-\frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)}$$
- 第1財を1単位追加的に消費するとき、効用を一定に保つためには、近似的に第2財を  $MRS$  減少させる必要がある。
- 「限界代替率は限界効用の比に等しい」

$$MRS = \frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)}$$



## 限界代替率（合理的な消費者の場合）

- 「限界代替率は限界効用の比に等しい」

$$MRS = \frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)}$$

- 効用が最大化されている場合は、ある  $\lambda$  に対して

$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = 0 \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 & = 0 \end{cases}$$

- この場合、限界代替率と価格比が等しくなる。

$$MRS = \frac{u_{x_1}(a)}{u_{x_2}(a)} = \frac{p_1}{p_2}$$

## Lagrange の未定乗数法 (十分条件)

- 制約条件  $g(x) = I - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$  の下で  $y = u(x)$  を極大化する。そのための十分条件:
- ある  $\lambda$  に対して

$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = 0 \\ I - p_1x_1 - p_2x_2 & = 0 \end{cases}$$

- さらに行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ -p_2 & u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0$$

- 以下では  $x = (a_1, a_2)$  においてこの条件を仮定する。

# 陰関数の定理

- $\mathbf{R}^6$  の開集合  $U$  上の  $C^1$  級関数  $g_i(x, y)$
- $x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$
- $(x, y) = (a, b)$  において

$$g_i(a, b) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \det \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) (a, b) \neq 0$$

- このとき

$$g_1(x, y) = g_2(x, y) = g_3(x, y) = 0$$

は

$$x_1 = \varphi_1(y), \quad x_2 = \varphi_2(y), \quad x_3 = \varphi_3(y)$$

と  $(a, b)$  の近くで  $C^1$  級関数  $\varphi_i$  で解ける。

## 陰関数の定理を適用

- $x \leftrightarrow (x_1, x_2, \lambda), \quad y \leftrightarrow (p_1, p_2, I)$
- $g_1 = u_{x_1} - \lambda p_1, \quad g_2 = u_{x_2} - \lambda p_2, \quad g_3 = I - p_1 x_1 - p_2 x_2$

- $\det \left( \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(x_1, x_2, \lambda)} \right) = \begin{vmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} & -p_1 \\ u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

- このとき

$$u_{x_1} - \lambda p_1 = u_{x_2} - \lambda p_2 = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

は

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I), \quad x_2 = x_2(p_1, p_2, I), \quad \lambda = \lambda(p_1, p_2, I)$$

と局所的に  $C^1$  級関数  $x_1, x_2, \lambda$  で解ける。



# 需要関数・間接効用関数・所得の限界効用

- $x_i = x_i(p_1, p_2, I)$  : 第  $i$  財の需要関数
- 間接効用関数  $v(p_1, p_2, I) = u(x_1(p, I), x_2(p, I))$
- 定理:  $\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p, I)$
- (証明)

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial I} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} \\ &= \lambda p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial I} + \lambda p_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial I} = \lambda \left( p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial I} \right)\end{aligned}$$

- $I = p_1 x_1(p, I) + p_2 x_2(p, I)$  が常に成立するので

$$1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial I}$$