消費者理論（2 財の場合）（その 3、双対理論）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2009 年 6 月

効用最大化問題

- 2 財の消費者理論を数学的に解説します。
- x_i：第 i 財の購入量、$p_i > 0$：第 i 財の価格、$I > 0$：所得
- （予算制約）$p_1x_1 + p_2x_2 = I$ の下で効用関数 $u(x_1, x_2)$ を最大化（極大化）
- (Lagrange の未定乗数法）ある λ が存在して

$$\begin{cases} u_{x_1} - \lambda \cdot p_1 & = & 0 \\ u_{x_2} - \lambda \cdot p_2 & = & 0 \\ I - p_1x_1 - p_2x_2 & = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

が極大点 $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ において成立する。

極大の十分条件

- （Lagrange の未定乗数法の十分条件）

$$
\begin{aligned}
0 &< \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} \\ -p_2 & u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} \end{vmatrix} \\
&= -\left(u_{x_1x_1} p_2^2 - 2u_{x_1x_2} p_1 p_2 + u_{x_2x_2} p_1^2 \right) \\
&= -\left(H(u) \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

極大の十分条件（注意）

- （注意１）十分条件は u が狭義の凹関数である十分条件

$$u_{x_1x_1}(\mathbf{x}) < 0,\ \det(H(u)(\mathbf{x})) > 0\ (\mathbf{x} \in U_{++}) \tag{3}$$

  を仮定すると成立する。
- (3) は

$$(H(u)(\mathbf{x})\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\mathbf{z} \in U_{++}, \vec{v} \neq \vec{0})$$

  と必要十分

極大の十分条件（準凹関数）No.1

- u が狭義の準凹関数とは

$$u(\mathbf{a}) \leq u(\mathbf{b}) \Rightarrow u(\mathbf{a}) < u((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \ (0 < t < 1) \tag{4}$$

- (4) の十分条件は

$$\left|\begin{array}{c|cc} 0 & u_{x_1} & u_{x_2} \\ \hline u_{x_1} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$H(u)$}} \\ u_{x_2} & & \end{array}\right| > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & u_{x_1} \\ u_{x_1} & u_{x_1 x_1} \end{vmatrix} = -u_{x_1}^2 < 0 \tag{5}$$

極大の十分条件（準凹関数）No.2

- 条件 (1) を (2) に代入すると

$$\left|\begin{array}{c|cc} 0 & -\frac{1}{\lambda}u_{x_1} & -\frac{1}{\lambda}u_{x_2} \\ \hline -\frac{1}{\lambda}u_{x_1} & & \\ -\frac{1}{\lambda}u_{x_2} & \multicolumn{2}{c}{H(u)} \end{array}\right| = \frac{1}{\lambda^2}\left|\begin{array}{c|cc} 0 & u_{x_1} & u_{x_2} \\ \hline u_{x_1} & & \\ u_{x_2} & \multicolumn{2}{c}{H(u)} \end{array}\right| > 0 \qquad (6)$$

  が導かれるが、これは (5) の下で成立する。
- $u_{x_1} > 0$ かつ $u_{x_2} > 0$ を仮定すると (5) の下で (1) から

$$\lambda > 0$$

  が従う。

前提と需要関数・間接効用関数

- （前提）以下では

$$u_{x_1},\ u_{x_2} > 0 \quad (\mathbf{x} \in U_{++})$$

$$\left|\begin{array}{c|cc} 0 & u_{x_1} & u_{x_2} \\ \hline u_{x_1} & & \\ u_{x_2} & \multicolumn{2}{c}{H(u)} \end{array}\right| > 0 \tag{7}$$

を仮定

前提と需要関数・間接効用関数

- $$\begin{cases} q_1(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{p}, I) & := & u_{x_1}(\mathbf{x}) - \lambda p_1 = 0 \\ q_2(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{p}, I) & := & u_{x_2}(\mathbf{x}) - \lambda p_2 = 0 \\ q_3(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{p}, I) & := & I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

  は

  $$\frac{\partial(q_1 \ q_2 \ q_3)}{\partial(\mathbf{x} \ \lambda)} = \begin{vmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} & -p_1 \\ u_{x_2x_1} & u_{x_2x_2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

  から、局所的に一意的に $\begin{cases} x_1 & = & x_1(\mathbf{p}, I) \\ x_2 & = & x_2(\mathbf{p}, I) \\ \lambda & = & \lambda(\mathbf{p}, I) \end{cases}$ と解ける。

前提と需要関数・間接効用関数

- $x_i(\mathbf{p}, I)$ 第 i 財の需要関数

$$v(\mathbf{p}, I) := u(x_1(\mathbf{p}, I), u_2(\mathbf{p}, I))$$

を間接効用関数という

費用最小化問題

- 制約条件 $u(\mathbf{x}) = \bar{u}$ の下で $x_1 p_1 + x_2 p_2$ を最小化（極小化）

費用最小化問題

- 制約条件 $u(\mathbf{x}) = \bar{u}$ の下で $x_1 p_1 + x_2 p_2$ を最小化（極小化）
- （Lagrange のの未定乗数法の必要条件）ある $\mu \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\begin{cases} p_1 - \mu u_{x_1} & = & 0 \\ p_2 - \mu u_{x_2} & = & 0 \\ \bar{u} - u(\mathbf{x}) & = & 0 \end{cases}$$