効用関数の最大化（その 1）

狭義凹の効用関数

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V01 Dec 02, 2020 for CalcNT

問題

$p, q, I > 0$ とします．第 1 財を x, 第 2 財を y 購入したときの効用関数

$$u: \mathbf{R}^2_{++} \to \mathbf{R}$$

を制約条件

$$I - px - qy = 0$$

の下で**最大化**することを考えます．

前提

効用関数が条件

$$u_{xx}(\mathrm{P}) < 0, \quad \det(H(u)(\mathrm{P})) = \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad (\mathrm{P} \in \mathbf{R}^2_{++}) \tag{1}$$

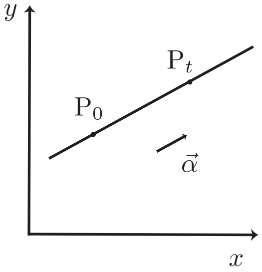
を満たすと仮定します.

前提からの帰結—2 階の方向微分

$\mathrm{P}_0 \in \mathbf{R}^2_{++}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ を満たす $\vec{\alpha} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$U(t) := u(\mathrm{P}_0 + t\vec{\alpha})$$

と関数を定義すると，仮定 (1) の下で



$$U''(t) < 0$$

が常に成立します.

結論

$\mathrm{P}_*(a,b) \in \mathbf{R}^2_{++}$ においてある $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\begin{cases} u_x(\mathrm{P}_*) + \lambda(-p) = 0 \\ u_y(\mathrm{P}_*) + \lambda(-q) = 0 \\ I - pa - qb = 0 \end{cases}$$

が成立すると仮定します．このとき $\mathrm{P}(x,y) \in \mathbf{R}^2_{++}$ に対して

$$\mathrm{P} \neq \mathrm{P}_*, \quad I - px - qy = 0 \Rightarrow u(\mathrm{P}) < u(\mathrm{P}_*)$$

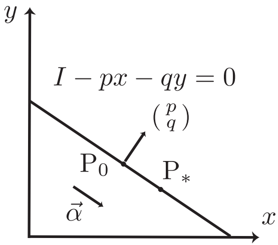
証明

$$U(t) = u(qt, \frac{I}{q} - pt)$$

とすると

$$U'(t) = u_x(qt, \frac{I}{q} - pt) \cdot q + u_y(qt, \frac{I}{q} - pt) \cdot (-p)$$

から $\mathrm{P}_{t_0} = \mathrm{P}_*$ とすると



さ

$$U'(t_0) = u_x(\mathrm{P}_0) \cdot q + u_y(\mathrm{P}_0) \cdot (-q) = \lambda pq + \lambda q(-p) = 0$$

らに $U''(t) < 0$ から

$$U(t) < U(t_0) \quad (t \neq t_0)$$

具体例 (1)

Cobb-Douglass 型効用関数

$$u(x, y) = Cx^{\alpha}y^{\beta} \quad (\alpha, \beta > 0, C > 0)$$

が条件 (1) を満たす必要十分条件は

$$\alpha + \beta < 1$$

です（演習問題）.

具体例 (2)

例えば

$$u(x,y)=\sqrt{xy}$$

の場合は

$$u_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},\ u_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$u_{xx}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}},\quad u_{xy}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}},\quad u_{yy}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$$

から

$$\det(H(u))=\begin{vmatrix}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\\ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} & -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}\end{vmatrix}=\frac{1}{16}\frac{1}{xy}-\frac{1}{16}\frac{1}{xy}=0$$

と条件 (1) は満たしませんが，停留点で最大値を取ります.（これを含む一般論もあります.）