関数の凹凸と２階微分

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V00 May, 2018 emath
V01 Oct 26, 2020 CalcNT

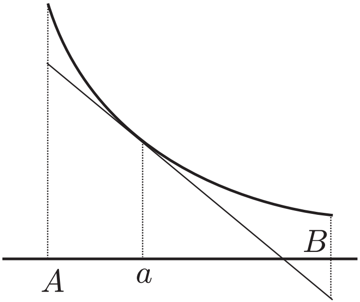
1 変数の場合

定理

- 開区間 (A, B) 上の C^2 級関数 $f:\ (A, B) \longrightarrow \mathbf{R}$
- 前提：$f''(t) > 0 \quad (t \in (A, B))$

このとき不等式

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t - a) \quad (t \neq a)$$



証明（その１）

- $F(t) := f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$ とする。
- $F'(t) = f'(t) - f'(a), \quad F''(t) = f''(t) > 0$
- $G'(t) > 0\ (t \in (A, B))$ とすると
$$A < s < t < B \Rightarrow G(s) < G(t)$$
- これを用いると $A < s < a < t < B \Rightarrow F'(s) < F'(a) = 0 < F'(t)$
- 増減表

t		a	
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	0	$\nearrow$

から $F(t) > 0 \quad (t \neq a)$

別の証明（Taylor の定理を用いる）

- $t \neq a$ とする。Taylor の定理を用いると
- $f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{1}{2}f''(c)(t-a)^2$
  を満たす c が t と a の間に存在する
- このとき $f''(c) > 0$ と $(t-a)^2 > 0$ から

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t-a)$$

応用（極大・極小の判定）

定理

- C^2 級の関数 $f:(A,B)\to\mathbf{R}$
- $t=a\in(A,B)$ において $f'(a)=0,\ f''(a)>0$ (resp. $f''(a)<0$) とする。
- このとき f は $t=a$ で極小（resp. 極大）

（証明の準備—連続関数の性質）

$G:(A,B)\to\mathbf{R}$ が連続とする。また $a\in(A,B)$ において $G(a)>0$ とする。このとき，ある正数 $\delta>0$ に対して

$$G(t)>0 \quad (t\in(a-\delta,a+\delta))$$

（証明は後述）

証明

- $f''(t)$ が連続であるので、ある正数 $\delta > 0$ に対して

$$f''(t) > 0 \quad (a - \delta < t < a + \delta)$$

- このとき、定理を区間 $(a - \delta, a + \delta)$ において用いると $t \neq a$ を満たす $t \in (a - \delta, a + \delta)$ に対して

$$f(t) > f(a) + f'(a)(t - a) = f(a)$$

連続関数の性質—証明

結論を論理的に書くと

$$\exists\delta > 0\ \forall t \in (a-\delta, a+\delta) \quad f(t) > 0$$

となりますが，これを否定すると

$$\forall\delta > 0\ \exists t \in (a-\delta, a+\delta) \quad f(t) \leq 0$$

特に $\delta = \frac{1}{n}$ とします．このとき

$$\exists t_n\ a - \frac{1}{n} < t_n < a + \frac{1}{n} \text{ AND } f(t_n) \leq 0$$

はさみうちの定理から $t_n \to a\ (n \to +\infty)$ となり，f の連続性から

$$0 \leq f(t_n) \to f(a) \leq 0 \text{（矛盾）}$$

2 変数の場合

- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$ を考える。
- $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$、${}^t(\xi\ \eta) \neq \vec{0}$ に対して
  $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$
- **(Chain Rule)** $G(t) = f(x(t), y(t))$ に対して
  $G'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$
- $F'(t) = f_x(P_t) \cdot \xi + f_y(P_t) \cdot \eta$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \xi\left(f_{xx}\xi + f_{xy}\eta\right) + \eta\left(f_{yx}\xi + f_{yy}\eta\right) \\ &= f_{xx}\xi^2 + 2f_{xy}\xi\eta + f_{yy}\eta^2 \end{aligned}$$

Hesse 行列

- $P \in U$ に対して Hesse 行列

$$H(f)(P) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{pmatrix}$$

- f が C^2 のとき $f_{xy} = f_{yx}$ ですから H は対称行列
- $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ に対して

$$F''(t) = \left(H(f)(P_t) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right)$$

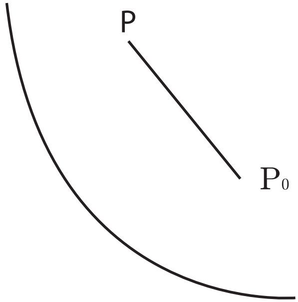
2 変数の（狭義）凸関数

定理

- $\mathbf{R}^2$ の凸開集合 U 上の C^2 級関数 $f: \ U \longrightarrow \mathbf{R}$
- $f_{xx}(P) > 0, \ \det(H(f)(P)) > 0 \ (P \in U)$ とする。このとき $(x, y) \neq (a, b)$ ならば

$$f(x, y) > f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

証明の準備



- （証明の準備）$\mathrm{P}(x, y)$ と $\mathrm{P}_0(a, b)$ に対して $\mathrm{P} \neq \mathrm{P}_0$ とする。そして

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

証明

- $F(t) = f(a + t\xi, b + t\eta)$ に Taylor の定理を適用
- $F(1) - F(0) = F'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2}F''(c) \cdot 1^2$
  を満たす c が 0 と 1 の間に存在する。
- $f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta + \frac{1}{2}(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v})$
- $\vec{v} \neq \vec{0}$ ですから $(H(f)(P_c)\vec{v}, \vec{v}) > 0$
- $f(x, y) - f(a, b) > f_x(a, b)\xi + f_y(a, b)\eta$

極大・極小の判定

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $f: U \to \mathbf{R}$

（復習）

f が $(a,b) \in U$ で極小・極大ならば $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

このとき (a,b) を f の**停留点**という。停留点が極大・極小になる十分条件を与える。

定理

$(a,b) \in U$ が $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす。
$f_{xx}(a,b) > 0,\ f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$

（$H(f)(a,b)$ は正定値）

このとき (a,b) で極小となる。

証明のために必要な連続関数の性質

- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数 $G: \ U \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続とする
- $(a, b) \in U$ に対して $G(a, b) > 0$ とする。
- このとき正数 $\delta > 0$ が存在して

$$G(x, y) > 0 \quad ((x, y) \in B_\delta(a, b))$$

証明

- f_{xx} と $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ は連続です。
- $f_{xx}(x, y) > 0 \ ((x, y) \in B_\delta(a, b))$
  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \ ((x, y) \in B_\delta(a, b))$
  を満たす正数 $\delta > 0$ が存在。
- 凸性の定理を用いると $(x, y) \in B_\delta(a, b)$ が $(x, y) \neq (a, b)$ ならば

$$\begin{aligned} f(x, y) &> f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &= f(a, b) \end{aligned}$$