

生産関数（2生産要素の場合）

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

2011年5月，2019年4月改訂

はじめに

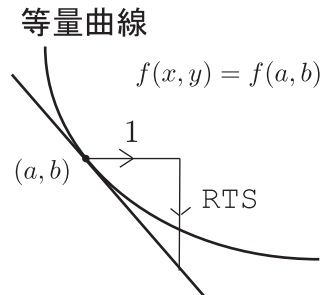
- 2種類の生産要素を用いて生産物を1種類生産することを数学的に解説します.
- x と y : 第1生産要素と第2生産要素の投入量
- 生産要素 (x, y) から生産される最大の生産量が

$$z = f(x, y)$$

とする. f を生産関数 (production function) と呼ぶ.

技術的限界代替率 (RTS)

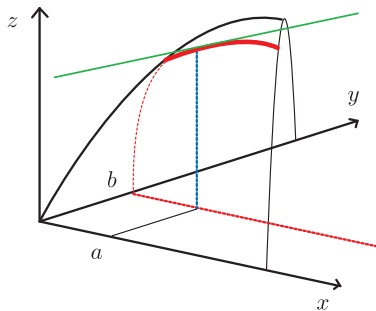
- 最大生産量が同一の曲線 $f(x, y) = f(a, b)$ を等産出量曲線 (equal product curve) または等量曲線 (isoquant) と呼びます。
- 等量曲線の接線の傾き $-\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$
- 第1生産要素を1単位追加的に投入するとき、生産量を一定に保つためには、**近似的に**第2財を *RTS* 減少させる必要がある。
- *RTS* は技術的限界代替率 (Marginal Rate of Technical Substitution)



限界生産物 (Marginal Product)

- 第2生産要素の投入量をそのままにして、第1生産要素を微少に変化させたときの生産量の増加率を第1要素の**限界生産物 (Marginal Product)**と呼びます。

$$MP_1 = f_x(a, b)$$



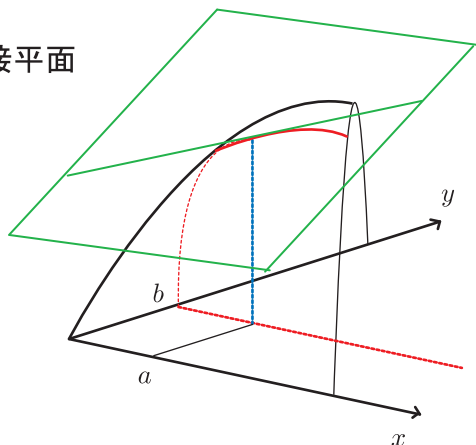
接平面

$z = f(x, y)$ の $(a, b, f(a, b))$ における接平面を求めましょう.

$$z = A(x - a) + B(y - b) + f(a, b)$$

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

接平面



接平面(その2)

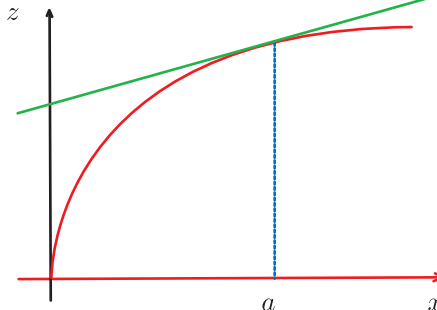
断面 $y = b$ を考えます。
接線の傾きは、偏微分の定義から

$$f_x(a, b)$$

他方、接平面を断面 $y = b$ に制限
すると

$$z = A(x - a) + f(a, b)$$

だから $A = f_x(a, b)$



接平面(その3)

- $z = f(x, y)$ の $(a, b, f(a, b))$ における接平面は

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

等量曲線の接線

次に断面 $z = f(a, b)$ を考えます.

- 等量曲線

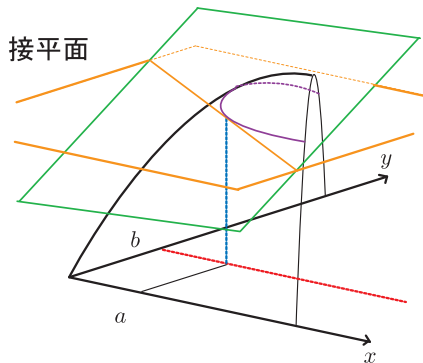
$$f(x, y) = f(a, b)$$

の接線

- $z = f(a, b)$ による接平面の断面

この両者が一致することに注意しましょう.

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$



等量曲線の接線、RTSと限界生産物 (MP)

接平面を $y = f(a, b)$ に制限すると

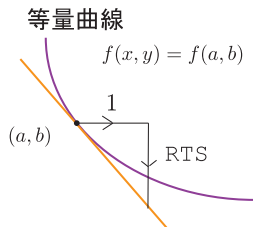
$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

になります。傾きは

$$-\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

となり

$$RTS = \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} = \frac{MP_1}{MP_2}$$



等量曲線の接線（陰関数の定理を用いる）

- （陰関数の定理）曲線 $g(x, y) = 0$ があるとき

$$g_y(a, b) \neq 0, \quad g(a, b) = 0$$

ならば、 a, b の近くで $y = \varphi(x)$ と解けます。

- これを $f(x, y) - f(a, b) = 0$ に適用します。すると

$$f(x, \varphi(x)) - f(a, b) = 0$$

が $x = a$ の近くで常に成立します。この両辺を微分すると

$$f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\longrightarrow \varphi'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

長期利潤の最大化

- ここで「長期」というのはすべての生産要素を変えるという意味である（短期的には、原子力発電所を建設できない）
- 簡単のために

$$f_{xx}(x, y) < 0, \quad \det(H(f)(x, y)) > 0 \quad ((x, y) \in \mathbf{R}_{++}^2)$$

を仮定する．これは、任意の $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ に対して

$$F(t) = f(a + \alpha_1 t, b + \alpha_2 t)$$

が

$$F''(t) < 0$$

を満たすことである．

長期利潤の最大化（その2）

- 生産物価格を $r > 0$ 、生産要素の価格を $p, q > 0$ とする。利潤

$$\pi(\mathbf{x}) = r \cdot f(x, y) - px - qy$$

を最大化する。 $a, b \in \mathbf{R}_{++}^2$ において

$$\pi_x(a, b) = r \cdot f_x(a, b) - p = 0, \quad \pi_y(a, b) = r \cdot f_y(a, b) - q = 0$$

とすると利潤が最大となる。

長期利潤の最大化（その3）

- このとき（利潤が最大化されるとき）

$$MP_1 = \frac{p}{r}, \quad MP_2 = \frac{q}{r}$$

となる。

- これを変形して

$$r \cdot MP_1 = p, \quad r \cdot MP_2 = q$$

となるが、これを限界生産物価値 (Value of Marginal Product) あるいは限界価値生産物 (Marginal Value Product) という。

技術的限界代替率と要素価格比（その1）

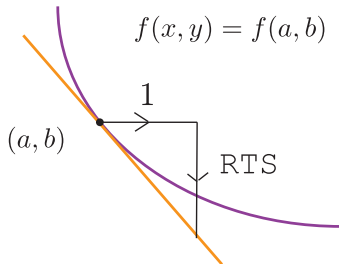
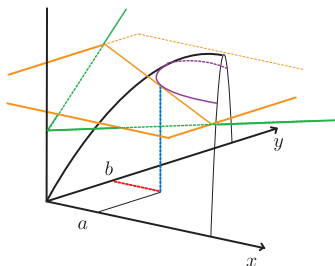
- このとき（利潤が最大化されるとき）

$$RTS = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{p/r}{q/r} = \frac{p}{q}$$

となる.

- この $RTS = \frac{p}{q}$ の意味を、西村和雄先生の「ミクロ経済学入門」（岩波書店、第2版）123ページに従って理解しよう.

等量曲線



- 等利潤平面 $rz - px - qy = \pi(a, b)$ と生産関数のグラフ $z = f(x, y)$ が $(a, b, f(a, b))$ で接しています。
- 等利潤平面と平面 $z = f(a, b)$ との交わり

$$px + qy = rf(a, b) - \pi(a, b)(= pa + qb)$$

が等量曲線の接線の方程式になります。