生産関数（2生産要素の場合）No 2 V004

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 6 月 (emath2011)
2020 年 6 月 (emath2020)

陰関数定理

- U を $\mathbf{R}^2$ の開集合、V を $\mathbf{R}^3$ の開集合とします。$(a,b)\in U$, $(\bar{p},\bar{q},\bar{r})\in V$ とします。
- **定理**　g_1，g_2 は $U\times V$ 上の関数とします。そして $g_1(a,b,\bar{p},\bar{q},\bar{r})=0$, $g_2(a,b,\bar{p},\bar{q},\bar{r})=0$, $\begin{vmatrix} g_{1x} & g_{1y} \\ g_{2x} & g_{2y} \end{vmatrix}(a,b,\bar{p},\bar{q},\bar{r})\neq 0$ を仮定します。このとき $(a,b,\bar{p},\bar{q},\bar{r})$ の近くで

$$g_1(x,y,p,q,r)=g_2(x,y,p,q,r)=0$$

は $x=x(p,q,r)$, $y=y(p,q,r)$ と解けます。

生産関数の場合

- $y = f(x, y)$ を生産関数として、利潤関数

$$\pi(x, y, p, q, r) = rf(x, y) - px - qy$$

を考えます。

- $(p, q, r) = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, $(x, y) = (a, b)$ において最大の利益が得られるとします。このとき

$$\pi_x(a, b, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) = \bar{r} f_x(a, b) - \bar{p} = 0$$

$$\pi_y(a, b, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) = \bar{r} f_y(a, b) - \bar{q} = 0$$

が成立します。

生産関数の場合

- $$\begin{vmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rf_{xx} & rf_{xy} \\ rf_{yx} & rf_{yy} \end{vmatrix} = r^2 \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$$
  が常に成立していますから（仮定）、陰関数の定理が適用できて
  $$\pi_x = rf_x(x,y) - p = 0,\ \pi_y = rf_y(x,y) - q = 0$$
  は $x = x(p,q,r),\ y = y(p,q,r)$ と解けます。

要素需要関数

- $x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$ を**要素需要関数**と呼びます。
- $x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$ の p,q,r に関する依存を調べてみます。

$$\begin{aligned} & \pi_x(x(p,q,r), y(p,q,r)) \\ = \quad & rf_x(x(p,q,r), y(p,q,r)) - p \equiv 0 \end{aligned}$$

の両辺を p で偏微分すると

$$r\left(f_{xx} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + f_{xy} \cdot \frac{\partial y}{\partial p}\right) - 1 = 0$$

要素需要関数 (2)

-
$$\begin{aligned} & \pi_y(x(p,q,r),y(p,q,r)) \\ = \ & rf_y(x(p,q,r),y(p,q,r)) - q \equiv 0 \end{aligned}$$

 の両辺を p で偏微分すると

$$r\left(f_{yx}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}+f_{yy}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\right)=0$$

要素需要関数(3)

- ２つの式をまとめると

$$\begin{pmatrix} rf_{xx} & rf_{xy} \\ rf_{yx} & rf_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- これを Cramer の公式で解くと

要素需要関数 (4)

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & rf_{xy} \\ 0 & rf_{yy} \end{vmatrix}}{r^2 \det(H(f))} = \frac{f_{yy}}{r \det(H(f))}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\begin{vmatrix} rf_{xx} & 1 \\ rf_{yx} & 0 \end{vmatrix}}{r^2 \det(H(f))} = \frac{-f_{yx}}{r \det(H(f))}$$

- 生産関数に関する条件 $\det(H(f)) > 0$, $f_{yy} < 0$ を仮定すると

$$\frac{\partial x}{\partial p} < 0$$

利潤関数の性質（１）

- 利潤関数を p, q, r の関数として表します。

$$
\begin{aligned}
\Pi(p,q,r) &:= \pi(x(p,q,r), y(p,q,r)) \\
&= rf(x(p,q,r), y(p,q,r)) \\
&\quad -px(p,q,r) - qy(p,q,r)
\end{aligned}
$$

- (Hotelling の補題)

$$
\frac{\partial \Pi}{\partial r} = f(x(p,q,r), y(p,q,r))
$$

$$
\frac{\partial \Pi}{\partial p} = -x(p,q,r), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = -y(p,q,r)
$$

Hotelling の補題の証明

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial r} &= f(x(p,q,r), y(p,q,r)) \\
&\quad + r f_x(x(p,q,r), y(p,q,r)) \frac{\partial x}{\partial r} + r f_y(x(p,q,r), y(p,q,r)) \frac{\partial y}{\partial r} \\
&\quad - p \frac{\partial x}{\partial r} - q \frac{\partial y}{\partial r} \\
&= f(x(p,q,r), y(p,q,r)) + \left(r f_x(x(p,q,r), y(p,q,r)) - p \right) \frac{\partial x}{\partial r} \\
&\quad + \left(r f_y(x(p,q,r), y(p,q,r)) - q \right) \frac{\partial y}{\partial r} \\
&= f(x(p,q,r), y(p,q,r))
\end{aligned}
$$

Hotelling の補題の証明 (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial p} &= rf_x(x(p,q,r),y(p,q,r))\frac{\partial x}{\partial p} + rf_y(x(p,q,r),y(p,q,r))\frac{\partial y}{\partial p} \\
&\quad -x(p,q,r) - p\frac{\partial x}{\partial p} - q\frac{\partial y}{\partial p} \\
&= \left(rf_x(x(p,q,r),y(p,q,r)) - p\right)\frac{\partial x}{\partial p} \\
&\qquad + \left(rf_y(x(p,q,r),y(p,q,r)) - q\right)\frac{\partial y}{\partial p} \\
&\qquad -x(p,q,r) \\
&= -x(p,q,r)
\end{aligned}
$$

包絡線定理

- U を $\mathbf{R}^2$ の開集合、I を開区間とします。

$$f: U \times I \to \mathbf{R}$$

を $\alpha \in I$ を固定して最適化します。$(a, b) \in U$ において

$$f_x(a, b, \alpha_0) = f_y(a, b, \alpha_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (a, b, \alpha_0) \neq 0$$

が成立するとします。

- このとき陰関数の定理を用いると (a, b, α_0) の近くで

$$f_x(x, y, \alpha) = f_y(x, y, \alpha) = 0$$

は $x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha)$ と解けます。

包絡線定理 (2)

- 間接目的関数 $F(\alpha) := f(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)$ について次の包絡線定理が成立します。
- **定理** $F'(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x(\alpha), y(\alpha))$
- **証明**

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{d\alpha} f(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) \\
= \; & f_x(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) \cdot x'(\alpha) \\
& \quad + f_y(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) \cdot y'(\alpha) + f_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) \\
= \; & f_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)
\end{aligned}
$$

包絡線定理 (3)

- 利潤関数

$$\pi(x, y, p, q, r) = rf(x, y) - px - qy$$

に適用すると

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{\partial \pi}{\partial r}(x(p, q, r), y(p, q, r), p, q, r) = f(x(p, q, r), y(p, q, r))$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = -x(p, q, r)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -y(p, q, r)$$