鞍点

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V01 Nov 04, 2020 for CalcNT

実 2 次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (1)

$A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right)$ が条件

$$|A| = ab - c^2 < 0$$

を満たす場合，A の固有値 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ は

$$\alpha\beta = |A| < 0$$

から

$$(\alpha > 0, \beta < 0) \quad \text{OR} \quad (\alpha < 0, \beta > 0)$$

となります．以下では

$$\alpha > 0, \beta < 0$$

の場合を考えます．

実 2 次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (2)

このとき

$$\alpha = \omega_1^2,\ \beta = -\omega_2^2,\ \omega_1, \omega_2 > 0$$

と表現できます．一般論から回転行列 $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

と対角化されます．このとき A が定める 2 次形式は回転座標変換

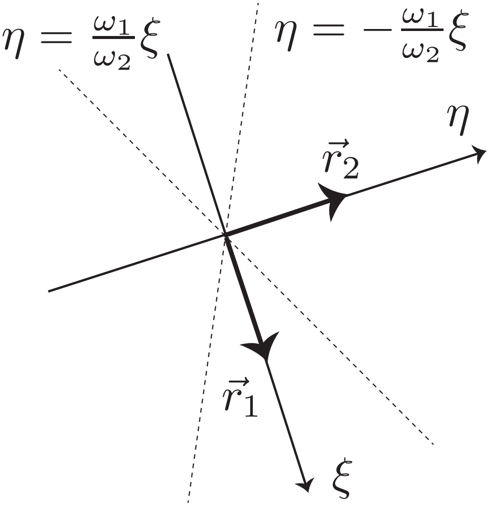
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

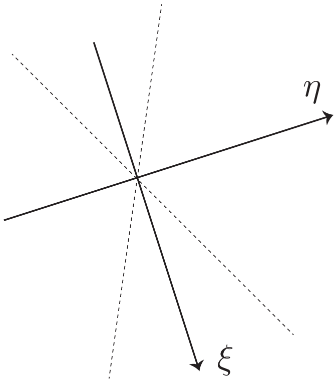
$$\begin{aligned}
\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \\
&= \omega_1^2\xi^2 - \omega_2\eta^2
\end{aligned}$$

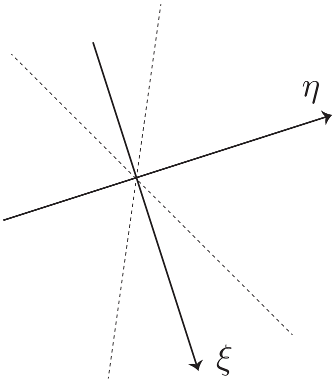
と表されます．

実 2 次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (3)



実 2 次対称行列 A が $|A| < 0$ を満たす場合 (4)





具体例 (1)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)$$

なので A の固有ベクトルは $\lambda = -2, 3$

<u>$\lambda = -2$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

具体例 (2)

<u>$\lambda = 3$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

ここで

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると R は回転行列で

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ 6\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

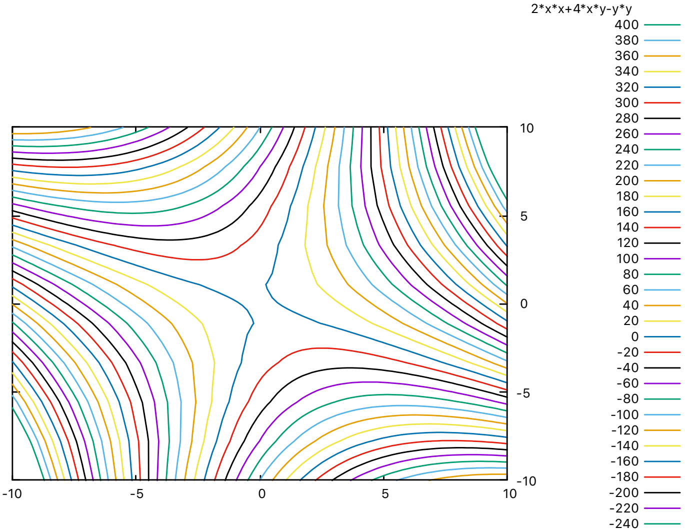
から $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と回転行列 R を用いて対角化できます.

具体例 (3)

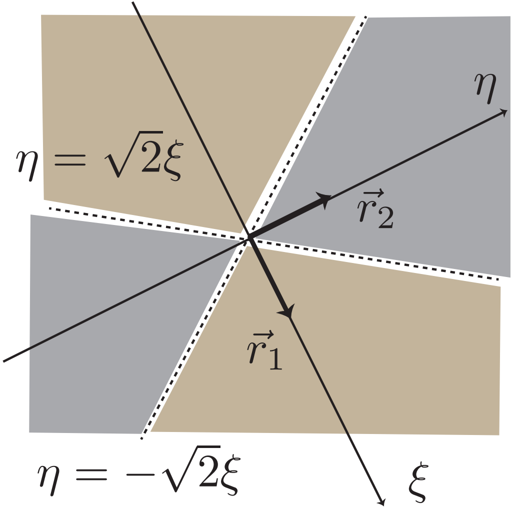
ここで回転座標変換 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = R\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$ を用いると，A が定める 2 次形式は

$$\begin{aligned}\left(A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(R^{-1}A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), R^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(R^{-1}AR \cdot R^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), R^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) \\ &= \left(\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)\right) = -2\xi^2 + 3\eta^2\end{aligned}$$

具体例 (4)—等高線 plot



具体例 (5)



Hesse 行列式が負の停留点 (1)

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U とその上の C^2 級関数

$$f:\ U \to \mathbf{R}$$

があるとします．f の停留点 $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$:

$$f_x(\mathrm{P}_0) = f_y(\mathrm{P}_0) = 0$$

について

定理

$\det(H(f)(\mathrm{P}_0)) < 0$ ならば P_0 で f は極大でも極小でもありません．

Hesse 行列式が負の停留点 (2)—証明

Hesse 行列 $H := H(f)(\mathrm{P}_0)$ の固有値を $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ とすると

$$\alpha\beta < 0$$

となります．ここでは$\underline{\alpha > 0, \beta < 0}$ の場合を考えます．回転行列 $R := (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)$ が存在して

$$R^{-1}AR = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$$

と対角化されます．このとき

$$F(t) := f(\mathrm{P}_0 + t\vec{r}_1)$$

とすると

$$F'(0) = (\nabla(f)(\mathrm{P}_0), \vec{r}_1) = 0, \quad F''(0) = (H(f)(\mathrm{P}_0)\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha > 0$$

Hesse 行列式が負の停留点 (3)—証明

他方

$$G(t) := f(\mathrm{P}_0 + t\vec{r}_2)$$

とすると

$$G'(0) = (\nabla(f)(\mathrm{P}_0), \vec{r}_2) = 0, \quad G''(0) = (H(f)(\mathrm{P}_0)\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\alpha\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta < 0$$

Hesse 行列式が負の停留点 (4)—証明