Chain Rule –その直観的な理解

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

2017 年 11 月

Chain Rule

- $\mathbf{R}^2$ の開集合 U と U 上の C^1 級関数
$$f:\ U \longrightarrow \mathbf{R}$$
が与えられているとします.
- U 中の微分可能な曲線
$$(A,B) \longrightarrow U \quad t \mapsto (x(t),y(t))$$ があるとします.
- このとき 1 変数の関数 $F:\ (A,B) \to \mathbf{R}$ を
$$F(t) = f(x(t),y(t))$$
と定義できます.

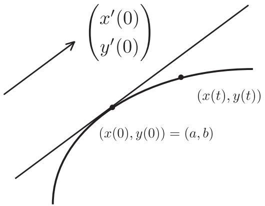
定理

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

パラメータ表示された曲線の接線方向 (1)

上で与えた曲線の $\mathbf{P_0}(a, b) = (x(0), y(0))$ における接線方向は

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$



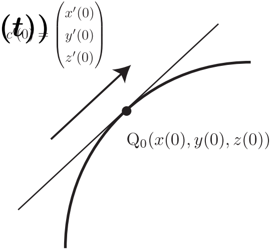
パラメータ表示された曲線の接線方向 (2)

3 次元空間中の曲線

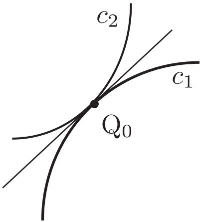
$$\boldsymbol{c}: (A, B) \to \mathbf{R}^3 \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

が与えられているとき $\boldsymbol{c}$ の $\mathbf{Q_0}(x(0), y(0), z(0))$ における接線方向は

$$\boldsymbol{c}'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{pmatrix}$$



3 次元空間中の 2 曲線



$$c_1 : (A, B) \to \mathrm{R}^3 \quad t \mapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$$
$$c_2 : (A, B) \to \mathrm{R}^3 \quad t \mapsto (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

が与えられていて点 $\mathrm{Q}_0(a, b, c)$ が共有されているとします．すなわち

$$(a, b, c) = (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2), z_2(t_2))$$

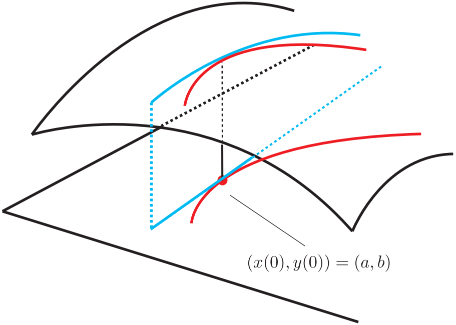
がある $t_1, t_2 \in (A, B)$ に対して成立するとします．このとき

$$c_1 \text{ と } c_2 \text{ が } \mathrm{Q}_0 \text{ で接する} \Leftrightarrow C_1'(t_1) \parallel C_2'(t_2)$$

空間中には曲線

$$(x(t), y(t), F(t))$$

があって，$x-y$ 平面の曲線 $(x(t), y(t))$ 上を動きます.
さらに別の曲線



$$(a + x'(0)t, b + y'(0)t, f(a + x'(0)t, b + y'(0)t))$$

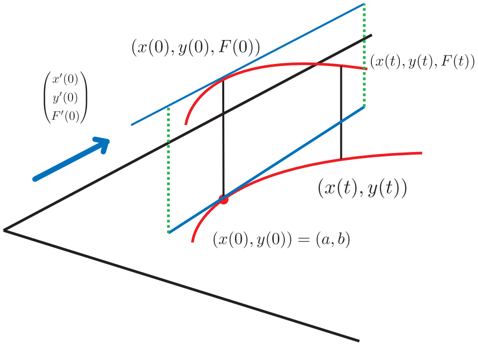
が接線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$ の上を動きます.
2 曲線は $(a, b, f(a, b))$ で接します.

曲線

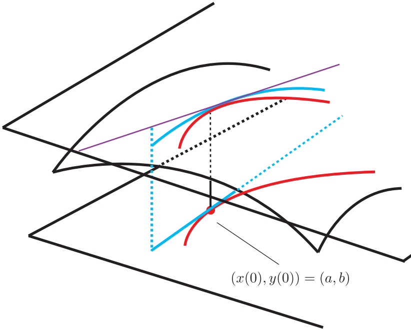
$$(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}))$$

の $(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{y}(0), \boldsymbol{F}(0))$ における接線方向は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'(0) \\ \boldsymbol{y}'(0) \\ \boldsymbol{F}'(0) \end{pmatrix}$$



接線方向 (2)



$$G(t) = f(a + x'(0)t, b + y'(0)t)$$

とするとき，曲線

$$(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$$

の $t = 0$ の $(a, b, f(a, b))$ における接線方向は

$$(x'(0), y'(0), f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0))$$

これは方向微分にあたります．

Chain Rule

- $(x(t), y(t), F(t))$ の接線方向

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ F'(0) \end{pmatrix}$$

と別の曲線 $(a + x'(0)t, b + y'(0)t, G(t))$ の接線方向

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0) \end{pmatrix}$$

は平行です.

- 従って

$$F'(0) = f_x(a,b)x'(0) + f_y(a,b)y'(0)$$