接平面（Tangent Plane）

Nobuyuki TOSE

October 04, 2017

平面の方程式

点 P_0 を通り $\vec{n}(\neq \vec{0})$ に垂直な平面 α を考えます．α の任意の点 P に対して

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = 0$$

が成立します．P_0 の座標が (x_0, y_0, z_0)，P の座標が (x, y, z),

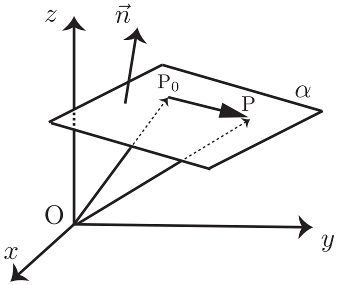
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad \text{であるとき} \quad \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

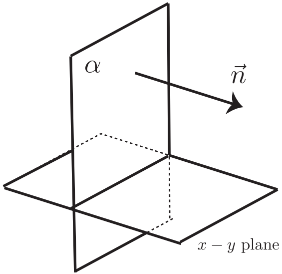
であるので，上の条件は座標を用いると

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

The Equation of a plane

$\vec{n}$ のことを平面の法線ベクトル (normal vector) と呼びます.

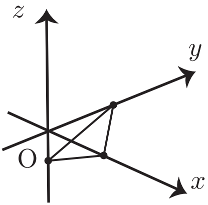




具体例

$$x + y - 2z = 2$$

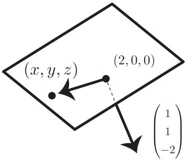
について考えます．通る点を具体的に求めます．



x 切片	(2,0,0)
y 切片	(0,2,0)
z 切片	(0,0,-1)

$(2, 0, 0)$ を通ることから

$$\begin{array}{rccccccc} & x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -) & 2 & + & 0 & - & 2\cdot 0 & = & 2 \\ \hline & (x-2) & + & y & - & 2z & = 0 & \end{array}$$



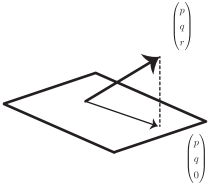
すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

In case $r = 0$

$r = 0$ の場合 $\vec{n}$ は $x - y$ 平面に平行になり，平面 α は $x - y$ 平面に垂直になります.

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \parallel x - y\text{平面}, \quad \alpha \perp x - y\text{平面}$$



偏微分（復習）

2 変数関数

$$z = f(x, y)$$

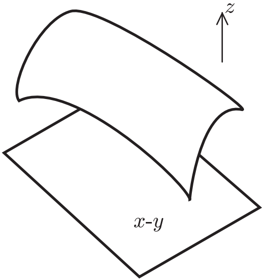
に対して x の関数

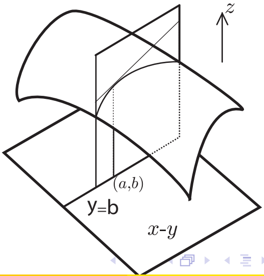
$$F(x) := f(x, b)$$

を考えて，(a, b) における x に関する
偏微分係数

$$f_x(a, b) = F'(a)$$

を定義します．





Tangent Plane

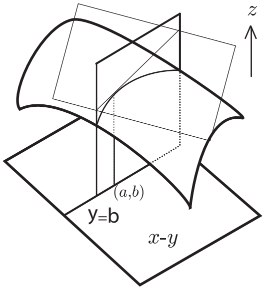
関数 $f(x,y)$ のグラフ

$$z = f(x,y)$$

の $(a, b, f(a,b))$ における接平面を求めます．そのために

$$z = A(x-a) + B(y-b) + f(a,b) \quad (1)$$

の係数 A,B を求めます.



Tangent Plane (2)

接平面と切断面 $y = b$ との交わりは，切断面の上では $z = F(x)$ の $x = a$ における接線となります．さらに (1) に $y = b$ を代入して切断面 $y = b$ 上に制限すると

$$z = A(x - a) + f(a, b)$$

となります．これからこの直線の傾きが A であることが分かり，

$$A = F'(a) = f_x(a, b)$$

であることが分かります．同様に

$$B = f_y(a, b)$$

となりますから，結局，接平面は方程式

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

で表されます．

例

関数

$$z = f(x, y) = 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

を $(x, y) = (a, b) = (10^4, 625)$ の周りで考えます．関数 f の偏導関数は

$$f_x(x, y) = 3x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}, \quad f_y(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}$$

となりますから，偏微分係数は

$$f_x(10^4, 625) = 1.5, \quad f_y(10^4, 625) = 8$$

と計算されます．従って $(x, y) = (10^4, 625)$ における接平面は

$$z = 1.5(x - 10^4) + 8(y - 625) + 2.0 \times 10^4$$

であることが分かります．

限界生産物（Marginal Products）

資本 (Capital) の投入量が K, 労働 (labor) の投入量が L の生産関数

$$Q = f(K, L)$$

を考えます．このとき $(K, L) = (K_0, L_0)$ の周りで Q は接平面を用いて

$$\begin{aligned} Q &\approx f_K(K_0, L_0)(K - K_0) + f_L(K_0, L_0)(L - L_0) + f(K_0, L_0) \\ &= f_K(K_0, L_0)\Delta K + f_L(K_0, L_0)\Delta L + f(K_0, L_0) \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \Delta Q = Q - Q_0 &= f(K, L) - f(K_0, L_0) \\ &\approx f_K(K_0, L_0)\Delta K + f_L(K_0, L_0)\Delta L \end{aligned}$$

と近似します（これを **1** 次近似と呼びます）.

限界生産物（Marginal Products）

$\Delta L = 0$ すなわち $L = L_0$ のとき

$$\Delta Q = f(K_0 + \Delta K, L_0) - f(K_0, L_0) \approx f_K(K_0, L_0) \cdot \Delta K$$

が成立します．このとき

$$MPK = F_K(K_0, L_0)$$

を $(K, L) = (K_0, L_0)$ における資本の限界生産物（**Marginal Product of Capital**）(MPK) と呼びます.

限界生産物（Marginal Products）

具体的に Cobb-Douglass 型の生産関数

$$Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$

を $(K, L) = (K_0, L_0) = (10^4, 625)$ の周りで考えます.

$$F_K(K, L) = 4 \cdot \frac{3}{4}K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}} = 3K^{-\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}$$
$$F_L(K, L) = 4 \cdot \frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}} = K^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$

と偏導関数を計算します.

$$(t^{\alpha})' = \alpha t^{\alpha-1}$$

限界生産物（Marginal Products）

このとき (K_0, L_0) における資本の限界生産物 (MPK) と**労働の限界生産物（Marginal Product of Labor）**（MPL) は

$$MPK = F_K(K_0, L_0) = \frac{3 \cdot 5}{10} = 1.5$$
$$MPL = F_L(K_0, L_0) = \frac{10^3}{5^3} = 8$$

となります．さらに $Q = F(10^4 + 100, 625) = 20,149.813\ldots$ の値の近似を

$$\begin{aligned} F(10^4 + 100, 625) &\approx F(10^4, 625) + F_K(10^4, 625) \cdot 100 \\ &= 20,000 + 1.5 \times 100 = 20,150 \end{aligned}$$

と計算します．

曲線の接線

曲線 C が 2 変数関数 g を用いて

$$g(x, y) = 0$$

と与えられているとします．例えば単位円は

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

と表されます．C 上の点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ が与えられているときに，C の $\mathrm{P}_0(a, b)$ における接線を求めます．

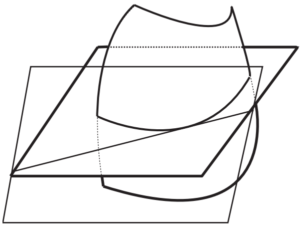
曲線の接線–3 次元的には

曲面

$$z = g(x, y)$$

の接平面を $(a, b, 0)$ で考えると

$$z = g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) \quad (2)$$



となります.

接平面と $x - y$ 平面の交わりは $x - y$ 座標では

$$g_x(a, b) \cdot (x - a) + g_y(a, b) \cdot (y - b) = 0$$

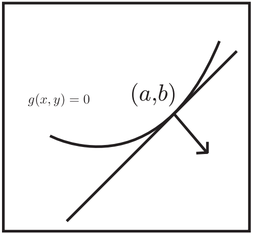
となります．これは接線の方程式となります.

Gradient Vector

方程式 (2) は内積を用いて

$$\begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = 0$$

と表されます.

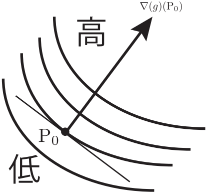


これからベクトル

$$\nabla(g)(a,b) := \begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix}$$

が接線に垂直であることが分かります. $\nabla(g)(a,b)$ を g の (a,b) における勾配ベクトル（**gradient vector**） と呼びます.

Gradient Vector —その向きは？



勾配ベクトルは g が大きくなる方向に向いています．登っていくときに最もきつい方向です．

例

単位円 $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ について考えます． g の偏導関数は

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y$$

ですから，したがって単位円上の点 (a,b) の接線は

$$2a(x-a) + 2b(y-b) = 0$$

となります.

陰関数の微分

曲線 C が (a, b) の近くで $y = \varphi(x)$ と表されていて，$g_y(a, b) \neq 0$ が成立するとします．このとき (a, b) における接線は

$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x - a) + b$$

となりますから，接線の傾きを考えて

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

であることが分かります．例えば曲線（単位円）$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ を $b > 0$ を満たす (a, b) で考えると，曲線は直接的には

$$y = \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

と表されますが，

$$\varphi'(a) = -\frac{2a}{2b} = -\frac{a}{b}$$

が成立することが分かります．

限界代替率（Marginal Rate of Substitution (MRS)）

消費者が商品 A,B をそれぞれ x, y 購入するときの効用が効用関数 $u(x,y)$ で与えられるとします．
このとき

$$u(x,y) = u(a,b)$$

を (a,b) を通る無差別曲線（**Indifference Curve**）と呼びます．このとき (a,b) における限界代替率（**Marginal Rate of Substitution**） を

$$\mathrm{MRS} = \frac{u_x(a,b)}{u_y(a,b)}.$$

と定義します．A の購入量を a から微小量 Δx だけ効用一定の下で（無差別曲線に沿って）増加させると，$\mathrm{MRS} \times \Delta x$ だけ B を減少させることになります．