1　連続時間のもとでの複利計算または割り引きについて

1.1　一定の利子率 (割引率) の下での連続複利割り引き

一単位時間あたりの割引率が ρ の下で t 時間後の価値はどのように割り引けばよいだろうか？一単位時間あたりに 1 回割り引くとすると、一単位時間後の価値１は現在価値で $(1+\rho)^{-1}$ になる。さらに一単位時間あたりに 2 回割り引くとすると一単位時間後の価値１は現在価値で $(1+\rho/2)^{-2}$ になる。ただし、このとき一回の割引につき割引率は $\rho/2$ となる。同様にして一単位時間あたりに n 回割り引くとすると、一単位時間後の価値１は現在価値で $(1+\rho/n)^{-n}$ になる。さらに一単位時間あたりに n 回割り引くとして t 時間後の現在価値１は $(1+\rho/n)^{-nt}$ となる。なぜならば、現在から t 時間後までに nt 回割り引きが行われるからである。ここで一単位時間あたりの割引回数 n を無限大にすると t 時間後の価値１は現在価値で結局、

$$\lim_{n\to\infty}(1+\rho/n)^{-nt} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/\rho}\right)^{n/\rho}\right]^{-\rho t} = \left[\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}\right]^{-\rho t} = e^{-\rho t}$$

になる。ただし、自然対数 e の定義は $e\equiv\lim_{s\to\infty}(1+1/s)^s$ であることに注意せよ。

結論 1 一単位時間あたりの一定の割引率 ρ の下で t 時間後の価値 V_t を連続複利割り引きでの現在価値で表すと $V_t e^{-\rho t}$ となる。

人口成長率への適用

連続時間の設定で人口成長率が＄n＄で与えられているとする。時点 0 の人口が N_0 と時点 t での人口 N_t にはどのような関係が成立するだろうか？つまり時点 t での人口 N_t を一定率 n で 0 時点まで割り引けば時点 0 での人口 N_0 が求まる。これは $N_0 = N_t e^{-nt}$ という関係で示される。これを整理することによって

$$N_t = e^{nt}N_0 \tag{1}$$

と表すことができる。人口成長率は $(dN_t/dt)/N_t$ によって定義されるが式 (1) を時間について微分すると $dN_t/dt = ne^{nt}N_0$ となる。これより、

$$(dN_t/dt)/N_t = \frac{ne^{nt}N_0}{e^{nt}N_0} = n$$

であることが確認できる。式 (1) は微分方程式 $(dN_t/dt)/N_t = n$ をの解として求めることもできる。

1.2　時間を通じて変化する利子率 (割引率) の下での連続複利割り引き

一単位時間あたりの利子率が r であるとして、この一定の利子率で t 時間後の価値１を現在価値にすると e^{-rt} となることは明らかであろう (単なる記号の書き換え)。ではこの利子率が時間を通じて変化する場合に t 時間後の価値１は現在価値でいくらになるだろうか？

利子率を時間 τ の関数として $r(\tau)$ と書き表すことにする。まず現在から t 時間後までの時間を n 個の区間に均等に分割する。すなわち区間 $[0,t]$ を $[0,t/n],(t/n,2t/n],(2t/n,3t/n],...,((n-1)t/n,t]$ の n 個の区間に分割する。そして分割された各区間については各区間の最後の時点の利子率を用いて連続的に複利割り引きをすることにしよう。このとき、t 時間後の価値 1 は $(n-1)t/n$ 時間後の価値に割り引くと $e^{-r(t)/n}$ となる。さらにこれを $(n-2)t/n$ 時間後の価値に割り引くと $e^{-r(t)/n}e^{-r((n-1)t/n)/n}$ になる。この手続きを現在時点まで繰り返すと、t 時間後の価値 1 は現在価値にして、

$$e^{-r(t)/n}e^{-r((n-1)t/n)/n}...e^{-r(t/n)/n}=e^{-\sum_{i=1}^{n}r(it/n)\frac{1}{n}}$$

となる。ここで区間 $[0,t]$ の分割を無限個にすると (すなわち n を無限大にすると)、t 時間後の価値 1 は結局現在価値にして、

$$\lim_{n\to\infty}e^{-\sum_{i=1}^{n}r(it/n)\frac{1}{n}}=e^{-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}r(it/n)\frac{1}{n}}=e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}$$

となる。ただし $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}r(it/n)/n=\int_0^t r(\tau)d\tau$ となることに注意せよ。[1]

結論 2 時間を通じて利子率が変化する場合、t 時間後の価値 V_t の現在価値は

$$V_t e^{-R(t)}$$

で表される。ただし、$R(t)\equiv\int_0^t r(\tau)d\tau$ で、これは累積利子率と呼ばれる。

[1] $\sum_{i=1}^{n}r(it/n)\frac{1}{n}$ は関数 $r(\tau)$ についての区間 $[0,t]$ におけるリーマン和の特殊ケースである。一般にリーマン和はある区間の任意の分割について定義され、その分割された諸区間の幅を 0 に持っていったときのリーマン和の収束値がその区間における積分値として定義されている。詳しくは解析学の教科書を参照せよ。

2　連続時間の成長モデル

2.1　設定

経済には消費者、および生産者が存在する。消費者は無限時間生きるとする。代表的消費者の時点 0 での効用は現時点から将来にわたっての消費から得られる効用の現在価値和であるとしよう。すなわち、

$$U_0 = \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}dt \tag{2}$$

がそれである。ただし、c_t は時点 t での消費量、$u(\cdot)$ は各時点での瞬間効用関数、ρ は主観割引率である。なお、$u(\cdot)$ については以下の仮定をおく。

仮定 1

$$u'(\cdot) > 0, \quad u''(\cdot) < 0,$$
$$u'(0) = \infty, \quad u'(\infty) = 0.$$

生産者の生産関数は労働投入量一単位あたり資本ストックの関数[2] として労働投入量一単位あたりの生産量との間に次のような関係があるとする。

$$y_t = f(k_t)$$

ただし、y_t は時点 t での労働投入量一単位あたりの生産量、k_t は労働投入量一単位あたりの資本ストックの量を表す。さらにこの生産関数についても以下の仮定をおく。

仮定 2

$$f'(\cdot) > 0, \quad f''(\cdot) < 0,$$
$$f'(0) = \infty, \quad f'(\infty) = 0. \quad \text{(稲田条件)}$$

資本ストックは投資によって増加する。時点 t での労働投入量一単位あたりの資本ストックを k_t と表す。労働投入量が人口 N_t と等しいとすると、総資本ストック量は $K_t = k_tN_t$ と表せる。資本減耗がない場合の総投資は $\dot{K}_t$[3] で表される。総投資を I_t とすると、

$$I_t = \dot{K}_t = \dot{k}_tN_t + k_t\dot{K}_t$$

という関係が成立する。労働投入量一単位あたりの投資を $i_t = I_t/N_t$ とすると、上の関係を N_t で割って

$$i_t = \dot{k}_t + k_t\frac{\dot{N}_t}{N_t} = \dot{k}_t + nk_t$$

という関係が導かれる。ただし、$\dot{k}_t$ は時点 t での労働投入量一単位あたりの資本ストックの変化量 (k_t を時間について微分したもの $\dot{k}_t = dk_t/dt$) である。

[2] これは資本ストックと労働投入量についての一次同次生産関数を前提としている。春学期に扱った生産関数と同様なものである。

[3] 変数 X_t の時間についての微係数 dX_t/dt を $\dot{X}_t$ で示すことにする。

2.2　中央計画当局の問題:パレート最適な資源配分

まず、中央計画当局が消費者の効用 (経済厚生) を最大化するように消費と資本ストックの時間流列を決める問題を考えてみよう。この問題の解はとりもなおさず、パレート最適な資源配分を決めることになる。

各時点で生産された最終生産物は消費にまわすか、資本ストックの増大にまわすかしかない。したがって、中央計画当局は常に次の資源制約に直面している。

$$c_t + \dot{k}_t + nk_t = f(k_t) \tag{3}$$

したがって中央計画当局の直面する問題は *(3)* の制約と、初期時点での労働投入量一単位あたり資本ストック k_0 を与えられた下で、消費者の効用 *(2)* を最大化するように消費 c_t の流列を定めることになる。ここで中央計画当局がコントロールしようとしているのは c_t の流列であるが、これを制御変数という。そして、制約式から明らかなように、消費を決めることによって資本ストックの量 k_t は時点 t での資本ストック量 k_t を与えられて $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t$ だけ変化する。ここで資本ストック k_t は状態変数と呼ばれ、この変化を表す式は状態遷移式と呼ばれる。

この問題の解は経常価値ハミルトニアン (current value Hamiltonian) についての諸条件を満たす c_t と k_t の流列である。まず経常価値ハミルトニアン H_t の定義から述べよう。これは

$$H_t \equiv u(c_t) + \lambda_t[f(k_t) - c_t - nk_t] \tag{4}$$

と定義される。右辺の第一項は最大化の目的関数 (効用関数) の瞬間効用であり、第二項の括弧内は状態遷移式つまり $\dot{k}_t$ にあたるものが入る。そして λ_t は補助変数と呼ばれるものである。さて、中央計画当局の直面する問題の解にあたる c_t、k_t の流列については経常価値ハミルトニアンに関して以下の 4 条件が成立するべきであることがわかっている。

$$\frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0 \tag{5}$$
$$\frac{\partial H_t}{\partial k_t} = \rho\lambda_t - \dot{\lambda}_t \tag{6}$$
$$\frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t \tag{7}$$
$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_t e^{-\rho t} = 0 \tag{8}$$

以上 (5) 式から (8) 式は中央計画当局の最大化問題の解が満たすべき条件であるが、それぞれの条件の意味を簡単に説明しておこう。

(5) 式は計算すると、

$$u'(c_t) = \lambda_t \tag{5'}$$

となる。条件 (5) および (7) をみると、あたかも経常価値ハミルトニアン H_t をラグランジュアンとみなし、それを最大化する条件のようになっている。この観点から λ_t は資本蓄積にまわした財 $f(k_t) - c_t - nk_t$ すなわち資本財の影の価格になっていると考えられる。したがって、条件 (5') は消費を一単位増やして獲得できる限界効用 (左辺) とそれによって失なわれ

る資本財 (将来の消費) の価値 (すなわち現在の消費を一単位増やすことの限界費用) が一致すると解釈できる。これはとりもなおさず時点 t での消費量についての最適条件である。
条件 (6) は計算すると、

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} + f'(k_t) = \rho + n \tag{6'}$$

となる。左辺の第一項は資本財の影の価格の変化率、すなわち時点 t に資本ストックを一単位持っていることによって獲得するキャピタルゲインである。さらに左辺の第二項は時点 t での資本ストックの限界生産力である。したがって左辺全体は時点 t で資本ストック一単位を持っていることによって獲得される利益、すなわち資本の報酬率を表す。他方、右辺は資本ストックを持つことで現在の消費が将来に先延ばしになることによって被る効用の減耗率である。これは資本一単位を保有することによる費用と考えられる。すなわち、条件 (6') は資本ストック保有についての限界利益と限界費用が一致するという時点 t での最適資本ストック保有条件と解釈できる。
条件 (7) は中央計画当局が直面する資源制約である。そして最後の条件 (8) は横断面条件と呼ばれているが、これは次のように解釈することができよう。$\lambda_t k_t e^{-\rho t}$ は時点 t で持つ資本ストックの現在価値である。つまり、時点 t より将来の消費のために残している資本財の現在価値である。仮に、この時点 t で消費者が死ぬとすれば、中央計画当局は時点 t に資本財を残しておくよりは時点 t までの消費に回したほうが効用を高めることができる。消費者は無限時点まで生きるので、(8) は無限時点後に資本財を残さず、それまでに全て使いつくすことが最適であるということを示す条件であると解釈できるであろう。
さて、以上に中央計画当局の問題の解が満たすべき条件について見てきたが、その解である消費と資本ストックの時間を通じた動きはどのようなものになるだろうか？これを見るために、条件 (5) および (6) から λ_t を消去し、条件 (7) とともにそれらの動向をみることにしよう。
条件 (5') を時間について微分すると

$$u''(c_t)\dot{c}_t = \dot{\lambda}_t \tag{5''}$$

となる。(5") および (5') を (6') に代入して λ_t を消去すると

$$\dot{c}_t = \left[-\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)} \right] (f'(k_t) - \rho - n) \tag{9}$$

となる。仮定 1 から明らかなように右辺の $-u'(c_t)/u''(c_t)$ は正の値をとる[4]。したがって、式 (9) からわかることは、

$$\begin{aligned}
\dot{c}_t > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f'(k_t) > \rho + n \\
\dot{c}_t = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f'(k_t) = \rho + n \\
\dot{c}_t < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f'(k_t) < \rho + n
\end{aligned}$$

[4] ちなみに $-u''(c_t)/u'(c_t)$ は絶対的危険回避度と呼ばれるもので、この値が大きいほど瞬間効用関数 $u(\cdot)$ の曲がりかたは強くなる。

である。これより、時間を通じた消費の動き $\dot{c}_t$ が $c_t - k_t$ 平面上の図によってわかる。資本ストックレベル k^* を $f'(k^*) = \rho + n$ の解と定義する。仮定２の資本の限界生産力逓減の性質から資本ストックが k^* より少ない局面では時間を通じて消費は減少し、資本ストックが k^* より大きい局面では消費は増大することがわかる。図 1 を見よ。

他方、条件 (7) からわかることは、

$$\begin{aligned} \dot{k}_t > 0 &\quad\Leftrightarrow\quad f(k_t) > c_t \\ \dot{k}_t = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad f(k_t) = c_t \\ \dot{k}_t < 0 &\quad\Leftrightarrow\quad f(k_t) < c_t \end{aligned}$$

である。やはり $c_t - k_t$ 平面上の図にしてわかることは、曲線 $c_t = f(k_t)$ より上に消費と資本ストックの組み合わせの点がある場合、資本ストックは時間を通じて減少し、逆であれば増加する。図 2 を見よ。

図１および２を重ねあわせることによって条件 (5)、(6) および (7) を満たす消費と資本ストックの組み合わせの動きをみることができる。結局それは図３のように表される。そのなかで唯一定常状態 E に通じる経路 AB がある。それ以外の経路は左上または右下へと消費と資本ストックの組み合わせは発散していく。このような点 E は鞍点と呼ばれ、経路 AB は鞍点経路と呼ばれる。ちなみに図 3 は位相図 (フェーズ-ダイアグラム) と呼ばれている。

さらに、中央計画当局が直面している問題で与えられていた初期資本ストックレベル k_0 を考慮すると (仮にこの値は k^* より小さいものであるとしよう)、中央計画当局はそこからスタートして垂直に消費水準 c_0 を決め、図３に示される諸経路のいずれかをたどることが最適化のために必要である。実は鞍点経路以外の経路をたどること、すなわち発散経路をたどることは中央計画当局の問題の最適条件を満たさなくなる。左上方に発散する経路は縦軸に到達する。資本ストックが負の値をとることはないのでこのとき資源制約 (3)(または条件 (7)) が満たされなくなる。また、右下方に発散する経路では条件 (8) が満たされなくなる。それに対して鞍点経路ではすべての条件が満たされる。以上の議論より、初期資本ストック k_0 を与えられて、経路 OE をたどるような消費-資本ストックの組み合わせが中央計画当局の問題の解になることがわかる。

以上に示した消費と資本ストックの経路はパレート最適な資源配分を達成している。このことから定常状態 E($\dot{k}_t = 0$ と $\dot{c}_t = 0$ が成立している状態) において修正された黄金律

$$f'(k_t) = \rho + n$$

が成立していることがすぐさま分かるであろう。

宿題

資本ストックが δ の率で減耗する場合に、これまでで示した中央計画当局の問題を解いてみなさい。

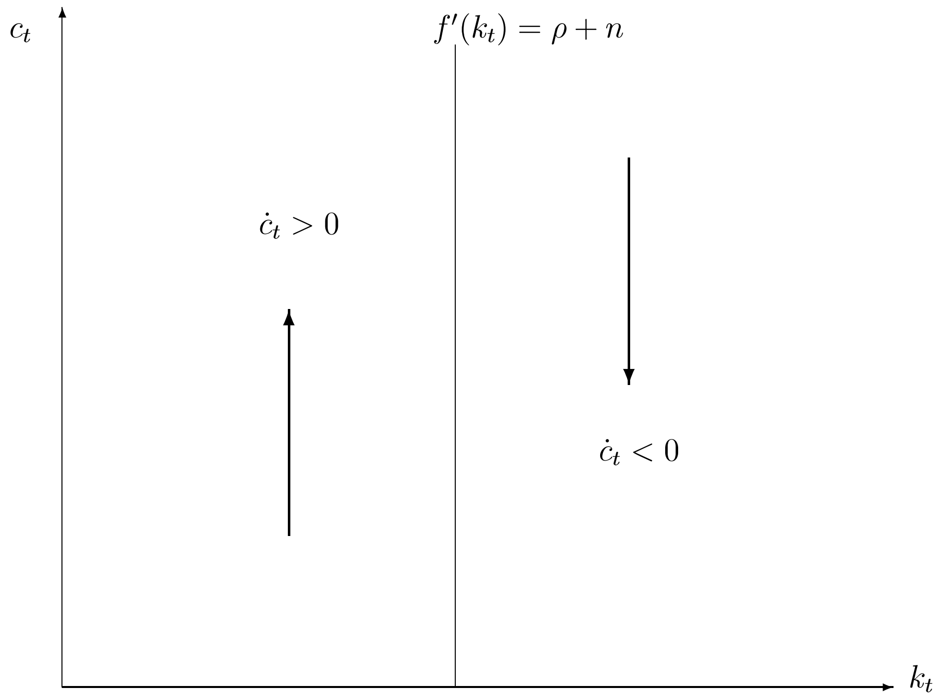

図 1.　c_t の動き

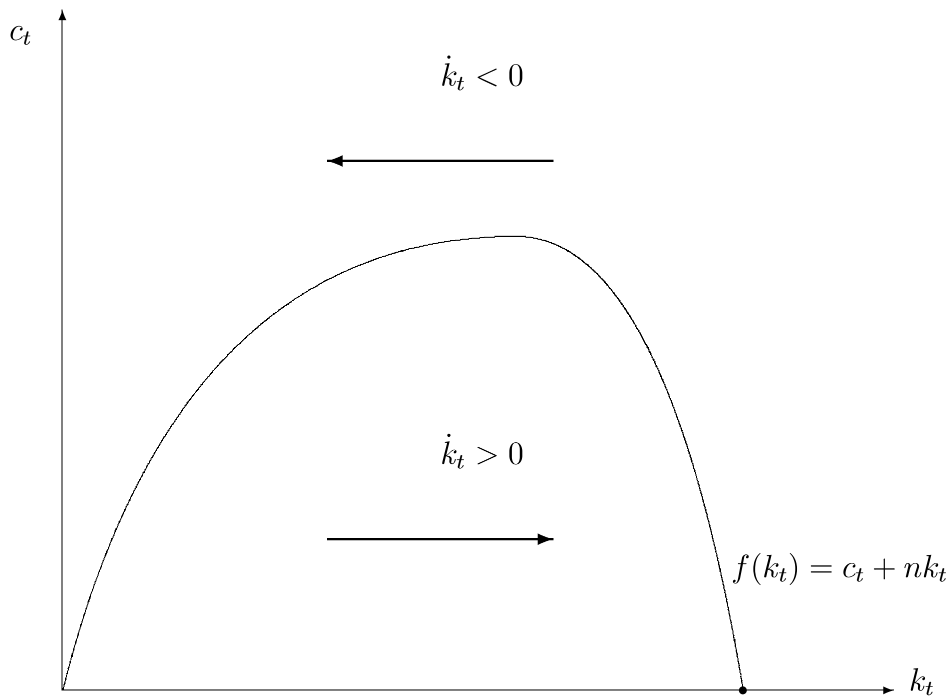

図 2.　k_t の動き

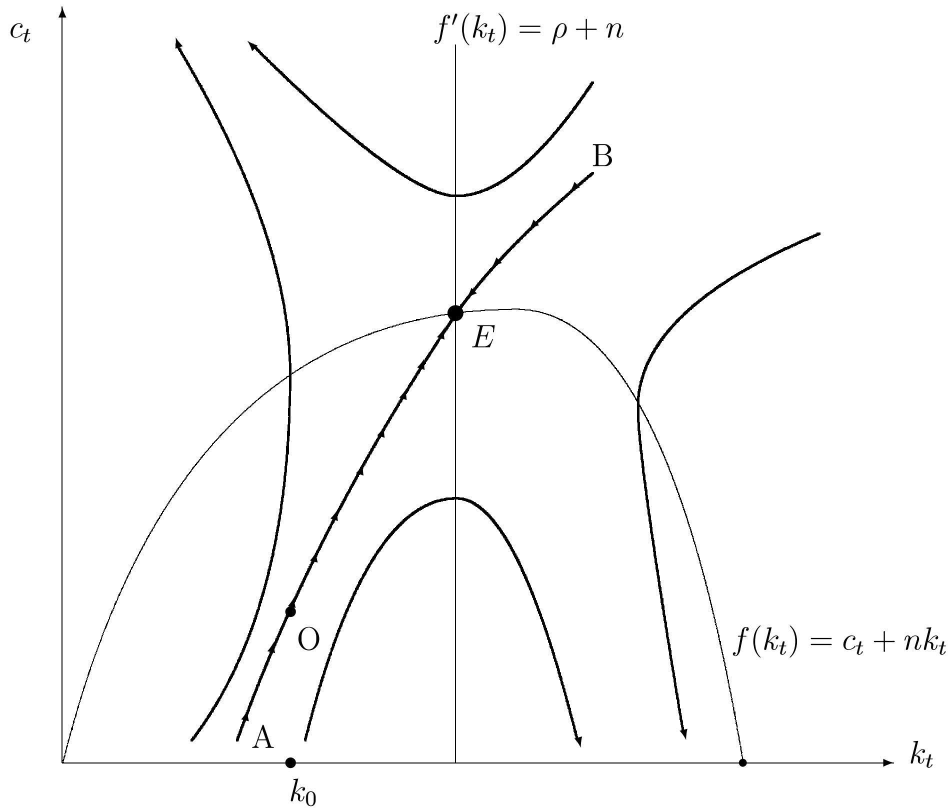

図 3.　位相図

2.3 市場均衡

次に消費者および生産者が自らの利益を最大化するように市場で取り引きを行う設定での資源配分の帰結について考える。結論を先取りすると、市場均衡で達成される資源配分は中央計画当局が経済厚生を最大化するときの資源配分と一致するということである。これはとりもなおさず厚生経済学の第一命題が成立していることを示すものである。

ここで取り扱う市場は完全競争市場であるとする。従って利子率および賃金は消費者および生産者にとって与えられたものである。まず消費者の直面する問題から考えよう。消費者は効用関数 (2) を最大化するように消費の流列を決定するが、その際時間を通じた予算制約に従わねばならない。それは生涯支出の現在価値の総和が生涯所得の現在価値の総和以下であるという条件であるが、以下のように導きだされる。消費者は各時点に資産 (証券類または預金) a_t を持つとする。ただし消費財をヌメレールとして扱い、資産保有額 s_t は時点 t での消費財単位で表されているとする。すなわち a_t は時点 t での実質資産保有額である。また時点 t での実質利子率は r_t で表すとする。時点 t において消費者は実質賃金 w_t および資産保有からの利払い r_ta_t を受け取る。この使い道は消費 c_t および実質資産の租積みまし $\dot{a}_t + na_t$ (すなわち時点 t での貯蓄) に充てられる。ただし、$\dot{a}_t = da_t/dt$ であり、na_t は時点 t に生まれる消費者への資本ストック割り当て分の一人あたりの負担額である (このモデルでは人口は n の率で増大しており、新たなる消費者には既存の消費者たちの実質資産が割り当てられると考えている)。$\dot{a}_t$ が正であれば一人あたり実質資産の積みましになり、負であれば一人あたり実質資産の取り崩しになる。この関係は

$$c_t + \dot{a}_t + na_t = w_t + r_ta_t$$

のように書き表される。これは次のように書きなおせる。

$$c_t + \dot{a}_t = w_t + (r_t - n)a_t \tag{10}$$

この式の左辺を解釈すると、消費者の時点 t における所得は労働賃金 w_t(すなわち一人あたりの消費者の労働所得) および新たな消費者への実質資産割り当ての負担を差し引いたネットでの一人あたりの利子所得 $(r_t - n)a_t$ となる。ここで重要なことは消費者にとっての資産保有から獲得されるネットでの利子率は $r_t - n$ となることである。これは消費者にとっての預金利子率が $r_t - n$ であると考えるとわかりやすいであろう。式 (10) を消費者にとっての預金利子率で割り引いた時点 0 の現在価値で表せば、

$$(c_t + \dot{a}_t)e^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau} = [w_t + (r_t - n)a_t]e^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}$$

したがって、各時点での支出 (左辺) と収入 (右辺) の現在価値の総和はこれを積分して以下のように表すことができる。

$$\int_0^\infty (c_t + \dot{a}_t)e^{-\int_0^t -r_\tau - nd\tau}dt = \int_0^\infty [w_t + (r_t - n)a_t]e^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt$$

この式が消費者の時間を通じた予算制約である。これをさらに整理すると、

$$\int_0^\infty c_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt = \int_0^\infty w_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt + \int_0^\infty [(r_t - n)a_t - \dot{a}_t]e^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt$$

となるが、特に上式右辺の第二項については、$d(-a_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau})/dt = [(r_t - n)a_t - \dot{a}_t]e^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}$ であることに着眼して積分計算をすると次のようになる。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty c_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt &= \int_0^\infty w_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt + \left[-a_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}\right]_0^\infty \\ &= \int_0^\infty w_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt - \lim_{t\to\infty} a_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau} + a_0\end{aligned}$$

上式の右辺第二項の $\lim_{t\to\infty} a_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}$ は無限期先の保有資産の現在価値を表す。この値を小さくすればするほど、すなわち負債を増やせば増やすほど上式の左辺の消費量をいくらでも大きくすることができてしまう。すなわち負債額を先延ばししていくらでも借り入れを増大することによって消費をいくらでも増やすということができてしまう。そのようなことはできないということを保証するために $\lim_{t\to\infty} a_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau} \leq 0$ という条件をおくことにする。これは no-Ponzi 条件と呼ばれるものである。この条件のもとに消費を最大限ふやすためには (つまり上式左辺をなるべく大きくするために右辺をなるべく大きくする) 結局

$$\lim_{t\to\infty} a_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau} = 0 \tag{11}$$

が成り立たなければならない。これを考慮すると、最終的に消費者の時間を通じた予算制約は次のように表せることになる。

$$\int_0^\infty c_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt = \int_0^\infty w_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt + a_0 \tag{12}$$

すなわち、時間を通じた消費者の予算制約は上式左辺の生涯支出の現在価値は右辺の生涯労働所得 (人的資産) と現在の実質保有資産 (非人的資産) の和である総資産と等しいということを表している。

消費者が直面する問題は制約式 (12) の下に効用関数 (2) を最大化するということになる。この問題はラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}dt + \lambda\left[\int_0^\infty w_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt + a_0 - \int_0^\infty c_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt\right]$$

を最大化することによって求まる。この一階の条件は以下のように表される。

$$u'(c_t)e^{-\rho t} - \lambda e^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau} = 0 \tag{13}$$

$$\int_0^\infty w_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt + a_0 - \int_0^\infty c_te^{-\int_0^t r_\tau - nd\tau}dt = 0 \tag{14}$$

特に、(13) を時間についてもう一度微分したものと、(13) を用いて λ を消去すると次を得る。

$$\dot{c}_t = -\left[\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}\right](r_t - \rho - n) \tag{15}$$

したがって消費者の最大化問題の最適条件として (14) および (15) が満たされるべきであることがわかる。

さらに生産者の行動を見てみよう。生産者は利潤の現在価値和を最大化することになる。すなわち

$$\int_0^\infty [f(k_t) - r_t k_t - w_t] e^{\int_0^t r_\tau - n d\tau} dt$$

を最大化することになるが、これはとりもなおさず各時点の利潤

$$f(k_t) - r_t k_t - w_t$$

を最大化するのと同じことになる (ここで r_t は時点 t における生産者にとっての資本の使用者費用を表す。このモデルでは資本減耗は無いとしているので資本の使用者費用は資本レンタル率に等しいく、生産者が資金借り入れに対して支払う利子率、すなわち貸し出し利子率にあたる。) この最大化の一階の条件は以下のとおりである。[5]

$$\begin{aligned} f'(k_t) &= r_t & (16) \\ f(k_t) - f'(k_t)k_t &= w_t & (17) \end{aligned}$$

あとは市場均衡条件によって利子率 r_t および賃金 w_t が定まる。このモデルの設定で説明したように $\dot{k}_t + nk_t = i_t$ は時点 t での投資を表す、これを用いて財市場の均衡条件を求めると、

$$\begin{aligned} c_t + i_t &= f(k_t) \\ \dot{k}_t &= f(k_t) - c_t - nk_t & (18) \end{aligned}$$

となる。[6] 上段の式は左辺が需要、右辺が供給でそれらが一致することを表し、式 (18) はそれを整理したものである。また資産市場の均衡条件は

$$a_t = k_t$$

で表される。

以上をまとめると、消費の初期値 c_0 さえ決まれば条件 (15)、(16)、(17) および (18) によって c_t、k_t、r_t および w_t が定まる (ここで k の初期値は $k_0 = a_0$ で与えられていることに注意せよ)。

ここでこれらの条件から定まる消費と資本ストックの時間を通じた動きを見てみよう。条件 (16) を (15) に代入するとそれは中央当局の最大化問題から得られた条件 (9) と同じであることがわかる。また条件 (18) はやはり中央計画当局の最大化問題から得られた条件 (7) と同じである。

---

[5] 条件 (16) および (17) によって最適資本労働比率 k_t が定まるが、それは条件 (16) と (17) の比をとって一本の式から決定される。すなわち k_t は w_t/r_t の関数として定まる。これは正確には生産者の単位費用最小化条件である。

[6] 財市場の均衡条件は $c_t + i_t = f(k_t)$ であるが、これを変形すると $i_t = f(k_t) - c_t$ となり、さらに生産関数の一次同次性と利潤最大化条件から $f(k_t) = f(k_t) - f'(k_t)k_t = w_t + r_t k_t$ となることを用いると、

$$i_t = w_t - r_t k_t - c_t = \dot{a}_t + na_t$$

すなわち貯蓄投資の均等式としても表せる。

さらに資産市場の均衡条件を no-Ponzi 条件 (11) に代入すると、それは

$$\lim_{t\to\infty} k_t e^{\int_0^t r_\tau - nd\tau} = 0$$

となるが、消費者の最大化条件 (13) を代入して $e^{\int_0^t r_\tau - nd\tau}$ を消去して整理すると

$$\lim_{t\to\infty} u'(c_t)k_t e^{-\rho t} = 0$$

となり、やはり中央計画当局の最大化問題で満たされるべき横断面条件 (8) と同じである。[7]

したがって、市場均衡の下での位相図は図 3 と全く同じものになる。そして市場均衡経路は鞍点経路になる。これは中央計画当局の問題の場合と同様に、左上方に発散する経路ではこのモデルでの資源制約にあたる財市場の需給均衡条件が満たされなくなり、右下方に発散する経路では、条件 (11) が満たされなくなるからである。鞍点経路では全ての条件が満たされる。

宿題 1

市場均衡モデルでの消費者の問題を経常価値ハミルトニアンを設定する方法 (最大値の原理) を用いてその最適条件を求めよ。その結果とプリントで行った時間を通じた予算制約のもとでのラグランジュ乗数法によってもとめた最適条件と比較せよ。

宿題 2

市場均衡モデルでの定常状態ではどのような条件が成立しているか確認せよ。

2.4 補論:動的計画法と最大値の原理の関係

本節では前々節で示した中央計画当局の最大化問題の経常価値ハミルトニアンによる解法 (最大値の原理) と、ベルマン (R. Bellman) による動的計画法 (Dynamic Programming) との関係について見てみよう。

まずは価値関数の定義から始めよう。価値関数とはいま関心となっている問題の解を与えられた状態変数の関数として表示するものである。すなわち、中央計画当局の最大化問題においては価値関数 $v(\cdot)$ は、初期資本ストック k_t の関数として次のように定義される。

$$\begin{aligned} v(k_t) \quad \equiv \quad & \max_{\{c_\tau\}_t^\infty} \int_t^\infty u(c_\tau)e^{-\rho\tau}d\tau \\ & \text{s.t. } \dot{k}_\tau = f(k_\tau) - c_\tau - nk_\tau \quad \text{for all } \tau \\ & \text{and given } k_t \end{aligned}$$

[7] 横断面条件 (8) における λ_t は条件 $(5')$ によって $u'(c_t)$ に等しいことに注意せよ

この問題の解をもたらす消費の流列 $\{c_\tau^*\}_t^\infty$ と条件 (3) から最適な k_τ^* の流列が定まる。これをもとに時点 t から先の時間を最初の微小期間 $[t, t+\Delta t]$ とそれ以後の期間 $[t+\Delta t, \infty]$ にわけて価値関数を近似してやると以下のように書きあらわされる。

$$
\begin{aligned}
v(k_t) &\approx u(c_t^*)\Delta t + e^{-\rho\Delta t} v(k_t + \Delta t) \\
&\approx u(c_t^*)\Delta t + (1-\rho\Delta t)[v(k_t) + v'(k_t)\Delta k_t] \\
\rho v(k_t) &\approx u(c_t^*) + v'(k_t)\frac{\Delta k_t}{\Delta t} \\
&\approx u(c_t^*) + v'(k_t)\dot{k}_t^* \\
&\approx u(c_t^*) + v'(k_t)[f(k_t) - c_t^* - nk_t]
\end{aligned}
$$

ここで $e^{-\rho\Delta t}$ はテイラー展開によって $e^{-\rho\Delta t} = 1 - \rho\Delta t + O(\Delta t)$ となり、$O(\Delta t)$ 以下の項は無視している。

つまり、時点 t に資本ストック k_t を与えられた場合の価値関数については時点 t での最適消費量 c_t^* との間に、

$$\rho v(k_t) = u(c_t^*) + v'(k_t)[f(k_t) - c_t^* - nk_t] \tag{19}$$

という関係が成立しているということである。この式の右辺は、$v'(k_t)$ を λ_t と見立てるとまさに経常価値ハミルトニアンである。左辺は価値関数に定数 ρ がかかっているだけであるから、経常価値ハミルトニアンは価値関数に定数 ρ をかけたものであることが理解できよう。このことから、経常価値ハミルトニアンが満たすべき諸条件の意味も簡単に理解することができる。

最適な消費 c_t^* は定式右辺を最大にするように定まっているはずである。したがって右辺をを c_t^* について微分すると

$$0 = u'(c_t^*) - v'(k_t) \tag{20}$$

が成立しているはずでる。ここで $v'(k_t)$ を λ_t と置き換えれば、式 (20) は最大値の原理における条件 (5) と同じものであることがわかる。また、式 (19) が微分可能であることを仮定して[8] k_t について微分すると、

$$\rho v'(k_t) = v''(k_t)[f(k_t) - c_t^*] + v'(k_t)(f'(k_t) - n) \tag{21}$$

を得る。やはり、$v''(k_t)[f(k_t) - c_t^*] = v''(k_t)\dot{k}_t$ を $\dot{\lambda}_t$ と置き換えると式 (21) は最大値の原理における条件 (6) に対応する。

[8] 価値関数 $v(k)$ の微分可能性の仮定を保証するような問題が満たすべき条件については Benveniste and Scheinkman(1979), "On the Differentiablity of the Value Function in Dynamic Models of Economics", *Econometrica*, vol 47, no. 3, pp. 727- 732. を参照せよ